JAO - automaty ze stosem

Automat stosowy

$$A = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$$

gdzie

- Γ - alfabet stosowy;
- δ - funkcja przejść. $\delta : \ (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to podzbiory(Q \times \Gamma^*)$.
- s_0 stan początkowy, Z_0 początkowy symbol na stosie;
- FQ - zbiór stanów akceptujących.

Opis chwilowy (pełna konfiguracja) to trójka: $(q,\ w,\ \alpha)$, gdzie w - niewczytana jezcze część tekstu wejściowego, q -stan, α - zawartość stosu (wierzchołek stosu z lewej strony α).

Konfiguracja początkowa (s_0, w, Z_0), gdzie $w \in \Sigma^*$. Przejścia od konfiguracji do konfiguracji w jednym kroku:

$$(q, aw, , Z\gamma) \vdash (q', w, \beta\gamma)$$

gdy $(q', \beta) \in \delta(a, q, Z)$. Definiujemy trzy typy akceptacji

[pustym stosem]

$$N(A) = \{w \in \Sigma^* \ : \ (s_0, w, Z_0) \vdash^* (q', \epsilon, \epsilon)\}$$

[stanem akceptującym]

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \ : \ (s_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \gamma) \ \& \ q \in F\}$$

[stanem akceptującym i pustym stosem]

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \ : \ (s_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon) \ \& \ q \in F\}$$

Lemat

Trzy typy akceptacji automatu ze stosem są równoważne w sensie klasy definiowanych języków.

Dla deterministycznych automatów zakłądamy, że jedyną formą akceptacji jest stanem akceptującym. Automat ze stosem jest deterministyczny gdy

1. $|\delta(a, q, Z)| \leq 1$ dla każdych a, q, Z;
2. jeśli $\delta(\epsilon, q, Z) \neq \emptyset$ to $\delta(a, q, Z) = \emptyset$ dla każdego $a \neq \epsilon$.

Inaczej mówiąc deterministyczny automat stosowy: w każdej sytuacji co najwyżej jeden ruch. Język jest deterministycznym językiem bezkntekstowym gdy jest akceptowany przez pewiem deterministyczny automat ze stosem.

Twierdzenie

Następujące języki bezkontekstowe nie są deterministyczne

$$L = \{ww^R \ : \ w \in (a \cup b)^+\}$$

$$\{a^n b^n \ : \ n \geq 1\} \cup \{a^n b^n \ : \ n \geq 1\}$$

Twierdzenie

Jeśli $L = N(G)$, gdzie G gramatyka bezkontekstowa, to istnieje automat stosowy A taki, że $L = N(A)$.

Dowód. Automat "zgaduje" lewostronne wyprowadzenie. Produkcja $A- > \gamma$ odpowiada zastąpieniu wierzchołka stosu (jeśli jest nim A) przez γ. Jeśli na wierzchołku jest symbol terminalny a i na wejściu też, to oba zostają "wymazane".

Bardziej formalnie: automat ma tylko jeden stan q, zero stanów akceptujących. Początkowy element stosu jest równy $Z_0 = S$, gdzie S początkowy symbol gramatyki. Funkcję przejść defiujemy tak:
Jeśli $A \xrightarrow{G} \alpha$ wstawiamy (q, α) do $\delta(a, q, A)$
Dla każdego $a \in \Sigma$ wstawiamy (q, ϵ) do $\delta(a, q, a)$.
Zachodzi:

$$S \xrightarrow{G}^{*} w \;\Leftrightarrow\; (q, S, w) \vdash^{*} (q, \epsilon, \epsilon).$$

Twierdzenie

Jeśli $L = N(A)$ dla automatu stosowego A, to $L = L(G)$ dla pewnego języka bezkontekstowego.

Dowód. Tworzymy gramatykę G, której nieterminalami są trójki (q, A, q_1) plus specjalny symbol początkowy S.
Jeśli

$$(q1, B_1 B_2..B_m) \in \delta(q, a, A)$$

to tworzymy zbiór produkcji postaci

$$(g, A, p) \rightarrow a \cdot (q_1, B_1, q_2)(q_2, B_2, q_2)..(q_m, B_m, p)$$

dla każdego $q_2, q_3, .., q_m \in Q$.

W szczególności jeśli $m = 0$, (a więc $(q_1, \epsilon) \in \delta(q, a, A)$) to tworzymy produkcję

$$(q, A, p) \rightarrow a, \text{ gdzie } p = q_1$$

Przejście od automatu ze stosem do gramatyki cd.

Na przykład, gdy

$$(q_1, B_1 B_2 B_3) \in \delta(q, a, A)$$

to tworzymy produkcję

$$(q, A, p) \to a \cdot (q_1, B_1, q_2)(q_2, B_2, q_3)(q_3, B_3, p)$$

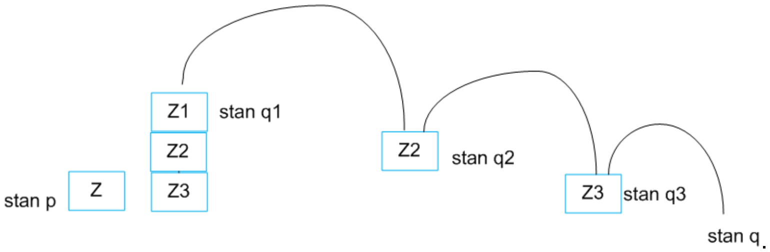
Ponadto tworzymy zbiór produkcji *inicjalnych*

$$S \to (q_0, Z_0, q)$$

dla każdego $q \in Q$

Zachodzi:

$$(q, A, q_1) \to_G^* x \Leftrightarrow (q, x, A) \vdash *(q_1, \epsilon, \epsilon)$$



Jesli automat ze stosem czytając symbol wejściowy a zastępuje na stosie Z przez $Z1\,Z2\,Z3$ oraz przechodzi do stanu $q1$ to mamy w gramatyce G produkcje

$$(p,\,Z,\,q) \rightarrow a\,(q1,\,Z1,\,q2)\,(q2,\,Z2,\,q3)\,(q3,\,Z3,\,q)$$

dla każdych $q2, q3, q \in Q$

Podobnie jak automaty skończone z wyjściem definiujemy automaty stosowe z wyjściem. Automaty takie mają znaczenie praktyczne.

Niech $ONP(W)$ oznacza odwrotną notację polską wyrażenia algebraicznego W. W notacji tej nie są potrzebne nawiasy, a operacje są zapisywane po swoich argumentach.

Twierdzenie

Deterministyczny automat stosowy z wyjściem może zrealizować $ONP(W)$, dla wyrażeń algebraicznych W z nawiasami.

Twierdzenie

Niedeterministyczny automat stosowy z wyjściem może wypisać (niedeterministycznie) ciąg produkcji odpowiadający lewostronnemu wyprowadzaniu słowa wejściowego.