SID – Wykład 7
Zbiory rozmyte

Dominik Ślęzak

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW
slezak@mimuw.edu.pl

Wstęp

Language	Ontological Commitment (What exists in the world)	Epistemological Commitment (What an agent believes about facts)
Propositional logic	facts	true/false/unknown
First-order logic	facts, objects, relations	true/false/unknown
Temporal logic	facts, objects, relations, times	true/false/unknown
Probability theory	facts	degree of belief 0..1
Fuzzy logic	degree of truth	degree of belief 0..1

Wprowadzenie

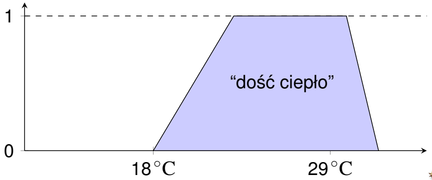
Metoda reprezentacji wiedzy wyrażonej w języku naturalnym:

Temperatura wynosi 29 °C → Jest dość ciepło

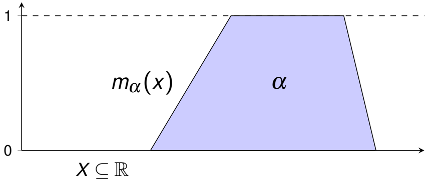
informacja liczbowa – naturalna dla systemów komputerowych

informacja opisowa – naturalna dla człowieka

Zamiast dwóch wartości logicznych (prawda i fałsz), dopuszcza się istnienie nieskończenie wielu wartości (odpowiadających liczbom rzeczywistym od 0 do 1)

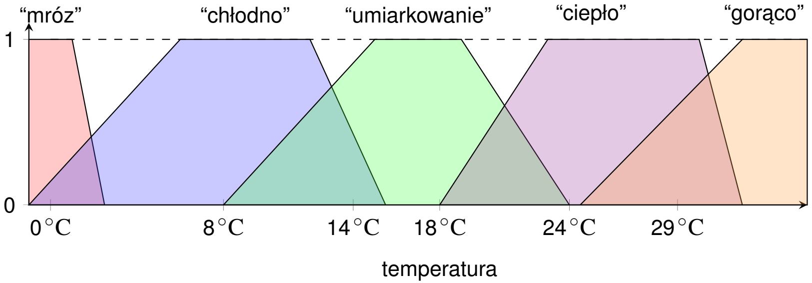


Zbiór rozmyty



- $m_\alpha : X \to [0,1]$ – funkcja przynależności zbioru rozmytego α (uogólnienie funkcji charakterystycznych zbiorów klasycznych)
- dziedzina $X \subseteq \mathbb{R}$ przyjmuje postać zbioru $\mathbb{R}$, przedziału $[x,y] \subseteq \mathbb{R}$, bądź $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, w zależności od natury zastosowania
- w tym ostatnim przypadku wygodnie jest reprezentować zbiór rozmyty α jako tablicę $\{(x_1,r_1),\ldots,(x_n,r_n)\}$, gdzie $r_i = m_\alpha(x_i), i = 1,\ldots,n$

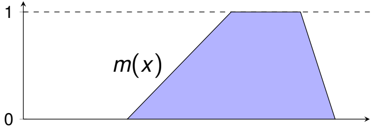
Zbiór rozmyty



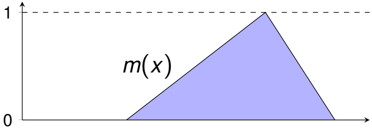
Pojęcia “ciepło” czy “gorąco” są określone w sposób nieostry: trudno jednoznacznie określić ich granice, ich zakresy mogą się częściowo pokrywać.

Funkcje przynależności

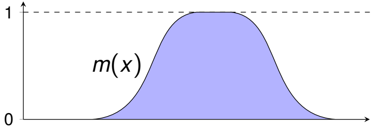
Funkcje mogą mieć kształt trapezu...

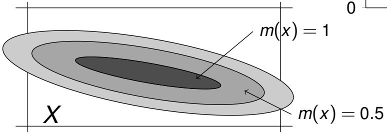


...trójkąta...



...ale też inny (np. sigmoidalny)...





...a zbiór X nie mysi być zbiorem liczb rzeczywistych

Reguły rozmyte

Reguły, których przesłanki lub wnioski wyrażone są w języku zbiorów rozmytych

- Jeśli x jest **małe** i y jest **średnie**, to uruchom alarm
- Jeśli x jest **małe** i y jest **małe**, to ustaw z na **duże**
- Jeśli x jest **duże**, to ustaw z na **małe**

Reguły pochodzące od ekspertów zwykle wyrażone są w języku nieprecyzyjnym

Zbiory rozmyte pozwalają nam przełożyć ten język na konkretne wartości liczbowe

Przykład

	Sun (%)	Temp. (°C)	Humid. (%)	Wind. (km/h)	Run (km/h)
1	100	31	90	10	6
2	90	22	85	50	8
3	50	25	95	20	12
4	0	15	80	0	13
5	10	4	70	10	15
6	30	7	55	40	7
7	40	8	65	60	15
8	70	14	90	20	10
9	80	1	70	30	14
10	20	13	60	0	14
11	80	11	60	70	14
12	60	17	80	50	13
13	50	26	55	30	16
14	20	12	95	60	9

Zbiory rozmyte pozwalają konstruować reguły typu.

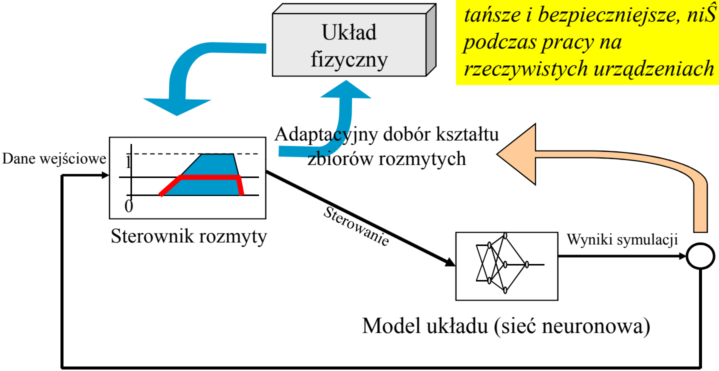
<u>jeśli temperatura jest wysoka i wilgotność jest niska, to sąsiad biega</u>

w języku naturalnym, przekładalne jednak na zależności numeryczne.

Sterowanie

sieć neuronowa jako symulator procesu fizycznego

Dobieranie parametrów sterownika rozmytego za pomocą neuronowego symulatora jest szybsze, tańsze i bezpieczniejsze, niŜ podczas pracy na rzeczywistych urządzeniach



Logika rozmyta – negacja

Niech α będzie zbiorem rozmytym określonym na dziedzinie $X \subseteq \mathbb{R}$

Negację zbioru α definiujemy jako zbiór $\neg\alpha$ o funkcji przynależności $m_{\neg\alpha} : X \to [0,1]$ określonej wzorem

$$m_{\neg\alpha}(x) = 1 - m_{\alpha}(x) \qquad \forall_{x \in X}$$

Przykładowo, dla zbioru α określonego przez tablicę
$\{(3,0.4),(5,1),(7,0.5),(9,0)\}$,
$\neg\alpha$ to tablica $\{(3,0.6),(5,0),(7,0.5),(9,1)\}$

Logika rozmyta – koniunkcja

Niech α, β będą zbiorami rozmytymi określonymi na dziedzinie $X \subseteq \mathbb{R}$

Koniunkcję α i β definiujemy jako zbiór rozmyty $\alpha \wedge \beta$ o funkcji przynależności $m_{\alpha\wedge\beta} : X \to [0,1]$ określonej wzorem

$$m_{\alpha\wedge\beta}(x) = T(m_\alpha(x), m_\beta(x)) \qquad \forall_{x \in X}$$

Funkcja $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ jest T-normą

Własności T-normy

- Warunki brzegowe:
  $T(0,x) = 0$ oraz $T(1,x) = 1$
- Monotoniczność:
  $x \leq y \implies T(x,z) \leq T(y,z)$
- Symetria:
  $T(x,y) = T(y,x)$
- Łączność:
  $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$

Przykładowe T-normy

- T-norma Zadeha:

$$T(r,s) = min\{r,s\} \qquad \forall_{r,s\in[0,1]}$$

- T-norma Mengera:

$$T(r,s) = r \cdot s \qquad \forall_{r,s\in[0,1]}$$

- T-norma Łukaszewicza:

$$T(r,s) = max\{0, r+s-1\} \qquad \forall_{r,s\in[0,1]}$$

Przykładowe T-normy

Dla α równego $\{(3,0.4),(5,1),(7,0.5),(9,0)\}$ oraz β równego $\{(3,0.6),(5,0),(7,0.5),(9,1)\}$ koniunkcja $\alpha \wedge \beta$ odpowiada tablicom:

- Zadeh: $\{(3,0.4),(5,0),(7,0.5),(9,0)\}$
- Menger: $\{(3,0.24),(5,0),(7,0.25),(9,0)\}$
- Łukaszewicz: $\{(3,0),(5,0),(7,0),(9,0)\}$

Alternatywa jako ko-norma

- Warunki brzegowe:
  $$C(0, x) = x \text{ oraz } C(1, x) = 1$$
- Monotoniczność:
  $$x \leq y \implies C(x, z) \leq C(y, z)$$
- Symetria:
  $$C(x, y) = C(y, x)$$
- Łączność:
  $$C(C(x, y), z) = C(x, C(y, z))$$

Dualność T-norm i ko-norm

- Alternatywa klasyczna:

$$\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

- Alternatywa rozmyta:

$$\begin{aligned} & m_{\alpha\vee\beta}(x) = m_{\neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)}(x) \\ & = 1 - min\{m_{\neg\alpha}(x), m_{\neg\beta}(x)\} \\ & = 1 - min\{1 - m_{\alpha}(x), 1 - m_{\beta}(x)\} \\ & = max\{m_{\alpha}(x), m_{\beta}(x)\} \end{aligned}$$

Uczenie się reguł rozmytych

Jakość danej reguły wyznaczamy na podstawie analizy wektorów uczących.

Niech α, β, γ będą zbiorami rozmytymi o dziedzinach $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$

Niech $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ będzie przykładowym wektorem uczącym.

Niech $r, s, t \in [0, 1]$ oznaczają stopnie przynależności x, y, z do zbiorów α, β, γ.

Uczenie się reguł rozmytych

Prawdziwość reguły $\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ dla stopni $r, s, t \in [0,1]$ otrzymamy przez ich podstawienie do wzoru na funkcję implikacji

$$F_{\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma} : [0,1]^3 \rightarrow [0,1]$$

Wzór ten można wyznaczyć zapisując $\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ jako

$$\neg((\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\gamma)$$

Jakość reguły możemy wyrazić jako jej średnią prawdziwość dla dostępnych wektorów uczących (x, y, z).

Stopnie prawdziwości implikacji

- Według T-normy Zadeha:
  $max\{1-r, 1-s, t\} \qquad \forall_{r,s,t\in[0,1]}$
- Według T-normy Mengera:
  $r \cdot s \cdot t + (1 - r \cdot s) \qquad \forall_{r,s,t\in[0,1]}$
- Według T-normy Łukaszewicza:
  $min\{1, 2 + t - r - s\} \qquad \forall_{r,s,t\in[0,1]}$

Wnioskowanie rozmyte

Chcemy wnioskować o stanach z Z na podstawie obserwacji $x \in X, y \in Y$

Niech α, β, γ będą zbiorami rozmytymi o dziedzinach $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$

Zastosowanie reguły rozmytej postaci

$$\textit{IF } \alpha \textit{ AND } \beta \textit{ THEN } \gamma$$

polega na wyliczeniu, jaki wpływ na $m_\gamma : Z \to [0, 1]$ mają stopnie przynależności obserwacji x, y do zbiorów α, β

Prawa wnioskowania

- Klasyczne prawo odrywania

$$\frac{\alpha \wedge \beta \qquad \alpha \wedge \beta \implies \gamma}{\gamma}$$

  można przepisać w silniejszej postaci

$$\frac{\alpha \wedge \beta \qquad \alpha \wedge \beta \implies \gamma}{\alpha \wedge \beta \wedge \gamma}$$

- Ta druga postać lepiej odzwierciedla ideę wnioskowania rozmytego

Wnioskowanie rozmyte

Załóżmy, że mamy do dyspozycji regułę

$$IF\ \alpha\ AND\ \beta\ THEN\ \gamma$$

Niech r, s oznaczają stopnie przynależności obserwacji x, y do α, β.

Zgodnie z silniejszą wersją prawa odrywania, funkcja przynależności do γ dla danych x, y przyjmuje postać

$$m_{\alpha/x \wedge \beta/y \wedge \gamma}(z) = T(r, s, m_\gamma(z)) \qquad \forall_{z \in Z}$$

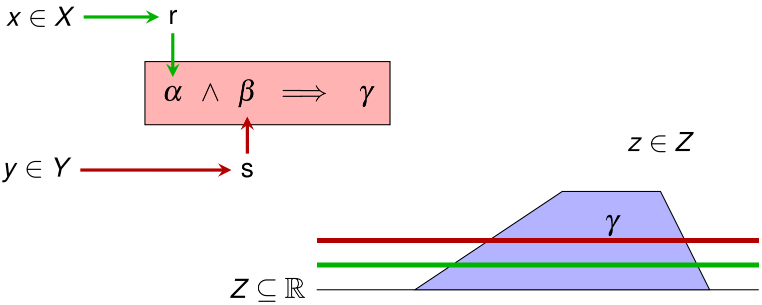
Przykład

α: $\{(-2,1),(0,0.5),(2,0)\}$ $\quad x=0$
β: $\{(-2,0.3),(0,1),(2,0.3)\}$ $\quad y=2$
γ: $\{(-2,0.1),(-1,0.4),(0,0.7),(1,1),(2,0.5)\}$

- Z: $\{(-2,0.1),(-1,0.3),(0,0.3),(1,0.3),(2,0.3)\}$
- M: $\{(-2,0.015),(-1,0.06),(0,0.105),(1,0.15),(2,0.075)\}$
- Ł: $\{(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,0),(2,0)\}$

Uściślanie (Defuzzyfikacja)

Znając wpływ obserwacji warunkowych na funkcję $m_\gamma : Z \to [0,1]$, musimy obliczyć wartość $z \in Z$, która powinna być podana jako odpowiedź modułu wnioskującego.



Przykład

α: $\{(-2,1),(0,0.5),(2,0)\}$ $\quad x = 0$

β: $\{(-2,0.3),(0,1),(2,0.3)\}$ $\quad y = 2$

γ: $\{(-2,0.1),(-1,0.4),(0,0.7),(1,1),(2,0.5)\}$

Z: $\{(-2,0.1),(-1,0.3),(0,0.3),(1,0.3),(2,0.3)\}$

$$z = \frac{-2\cdot 0.1 - 1\cdot 0.3 + 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.3 + 2\cdot 0.3}{0.1+0.3+0.3+0.3+0.3} = \frac{4}{13}$$

Dziękuję za uwagę!