Logika pierwszego rzędu – składnia i semantyka

Logika pierwszego rzędu nazywana jest też rachunkiem predykatów lub rachunkiem kwantyfikatorów.

Sygnatura

Sygnatura Σ to rodzina zbiorów Σ_n^F, dla $n \geq 0$ oraz rodzina zbiorów Σ_n^R, dla $n \geq 1$.

Sygnatura

Sygnatura Σ to rodzina zbiorów Σ_n^F, dla $n \geq 0$ oraz rodzina zbiorów Σ_n^R, dla $n \geq 1$.

Elementy Σ_n^F to symbole operacji n-argumentowych.

Sygnatura

Sygnatura Σ to rodzina zbiorów Σ_n^F, dla $n \geq 0$ oraz rodzina zbiorów Σ_n^R, dla $n \geq 1$.

Elementy Σ_n^F to symbole operacji n-argumentowych.

Elementy Σ_n^R to symbole relacji n-argumentowych.
Znak równości $=$ nie należy do Σ.

Sygnatura

Sygnatura Σ to rodzina zbiorów Σ_n^F, dla $n \geq 0$ oraz rodzina zbiorów Σ_n^R, dla $n \geq 1$.

Elementy Σ_n^F to symbole operacji n-argumentowych.

Elementy Σ_n^R to symbole relacji n-argumentowych.
Znak równości $=$ nie należy do Σ.

Gdy sygnatura jest skończona to często zapisuje się ją jako ciąg symboli, np. $+, \cdot, 0, 1$

Zmienne i termy

Ustalamy nieskończony przeliczalny zbiór X zmiennych indywiduowych.

Zmienne i termy

Ustalamy nieskończony przeliczalny zbiór X zmiennych indywiduowych.

Zbiór termów $\mathcal{T}_\Sigma(X)$ nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

Zmienne i termy

Ustalamy nieskończony przeliczalny zbiór X zmiennych indywiduowych.

Zbiór termów $\mathcal{T}_\Sigma(X)$ nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Zmienne indywiduowe są termami

Zmienne i termy

Ustalamy nieskończony przeliczalny zbiór X zmiennych indywiduowych.

Zbiór termów $\mathcal{T}_\Sigma(X)$ nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Zmienne indywiduowe są termami
- Dla każdego $n \geq 0$ i każdego symbolu operacji $f \in \Sigma_n^F$, jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami, to $f(t_1, \ldots, t_n)$ jest też termem

Zmienne i termy

Ustalamy nieskończony przeliczalny zbiór X zmiennych indywiduowych.

Zbiór termów $\mathcal{T}_\Sigma(X)$ nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Zmienne indywiduowe są termami
- Dla każdego $n \geq 0$ i każdego symbolu operacji $f \in \Sigma^F_n$, jeśli $t_1, \dots, t_n$ są termami, to $f(t_1, \dots, t_n)$ jest też termem

Zbiór $FV(t)$ zmiennych występujących w t:

Zmienne i termy

Ustalamy nieskończony przeliczalny zbiór X zmiennych indywiduowych.

Zbiór termów $\mathcal{T}_\Sigma(X)$ nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Zmienne indywiduowe są termami
- Dla każdego $n \geq 0$ i każdego symbolu operacji $f \in \Sigma_n^F$, jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami, to $f(t_1, \ldots, t_n)$ jest też termem

Zbiór $FV(t)$ zmiennych występujących w t:

- $FV(x) = \{x\}$.

Zmienne i termy

Ustalamy nieskończony przeliczalny zbiór X zmiennych indywiduowych.

Zbiór termów $\mathcal{T}_\Sigma(X)$ nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Zmienne indywiduowe są termami
- Dla każdego $n \geq 0$ i każdego symbolu operacji $f \in \Sigma_n^F$, jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami, to $f(t_1, \ldots, t_n)$ jest też termem

Zbiór $FV(t)$ zmiennych występujących w t:

- $FV(x) = \{x\}$.
- $FV(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n FV(t_i)$.

Formuły atomowe

Zbiór formuł atomowych nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

Formuły atomowe

Zbiór formuł atomowych nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Fałsz $\bot$ jest formułą atomową

Formuły atomowe

Zbiór formuł atomowych nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Fałsz $\perp$ jest formułą atomową
- Dla każdego $n \geq 1$, każdego symbolu $r \in \Sigma_n^R$, oraz dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_\Sigma(X)$, napis $r(t_1, \ldots, t_n)$ jest formułą atomową

Formuły atomowe

Zbiór formuł atomowych nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Fałsz $\perp$ jest formułą atomową
- Dla każdego $n \geq 1$, każdego symbolu $r \in \Sigma_n^R$, oraz dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_\Sigma(X)$, napis $r(t_1, \ldots, t_n)$ jest formułą atomową
- Dla dowolnych termów t_1, t_2, napis $(t_1 = t_2)$ jest formułą atomową.

Formuły

Zbiór formuł nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

Formuły

Zbiór formuł nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Formuła atomowa jest formułą.

Formuły

Zbiór formuł nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Formuła atomowa jest formułą.
- Jeśli φ, ψ są formułami, to $(\varphi \to \psi)$ jest formułą.

Formuły

Zbiór formuł nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych X:

- Formuła atomowa jest formułą.
- Jeśli φ, ψ są formułami, to $(\varphi \to \psi)$ jest formułą.
- Jeśli φ jest formułą a $x \in X$ jest zmienną indywiduową, to $(\forall x \varphi)$ jest formułą.

Zmienne wolne formuły

Zbiór zmiennych wolnych $FV(\varphi)$ występujących w φ:

Zmienne wolne formuły

Zbiór zmiennych wolnych $FV(\varphi)$ występujących w φ:

- $FV(\perp) = \emptyset$;

Zmienne wolne formuły

Zbiór zmiennych wolnych $FV(\varphi)$ występujących w φ:

- $FV(\bot) = \emptyset$;
- $FV(r(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$;

Zmienne wolne formuły

Zbiór zmiennych wolnych $FV(\varphi)$ występujących w φ:

- $FV(\bot) = \emptyset$;
- $FV(r(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$;
- $FV(t_1 = t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$;

Zmienne wolne formuły

Zbiór zmiennych wolnych $FV(\varphi)$ występujących w φ:

- $FV(\bot) = \emptyset$;
- $FV(r(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$;
- $FV(t_1 = t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$;
- $FV(\varphi \to \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;

Zmienne wolne formuły

Zbiór zmiennych wolnych $FV(\varphi)$ występujących w φ:

- $FV(\bot) = \emptyset$;
- $FV(r(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$;
- $FV(t_1 = t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$;
- $FV(\varphi \to \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;
- $FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) - \{x\}$.

Zmienne wolne formuły

Zbiór zmiennych wolnych $FV(\varphi)$ występujących w φ:

- $FV(\perp) = \emptyset$;
- $FV(r(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$;
- $FV(t_1 = t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$;
- $FV(\varphi \to \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;
- $FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) - \{x\}$.

Formuła bez kwantyfikatorów to formuła otwarta.

Formuła bez zmiennych wolnych to zdanie, lub formuła zamknięta.

Skróty składniowe

Dodatkowe spójniki zdaniowe traktujemy jako skróty:

- $(\neg\varphi)$ oznacza $\varphi \to \bot$
- $(\varphi \vee \psi)$ oznacza $((\neg\varphi) \to \psi)$
- $(\varphi \wedge \psi)$ oznacza $(\neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)))$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ oznacza $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

Kwantyfikator egzystencjalny jest także skrótem:

$$(\exists x\varphi) \qquad \text{oznacza} \qquad (\neg(\forall x\neg\varphi)).$$

Wystąpienia wolne a wystąpienia związane w formule

Wystąpienia zmiennych w formułach atomowych są wolne.

Wystąpienia wolne a wystąpienia związane w formule

Wystąpienia zmiennych w formułach atomowych są wolne.

Wolne (związane) wystąpienia w φ i ψ pozostają wolne (związane) w formule $\varphi \to \psi$.

Wystąpienia wolne a wystąpienia związane w formule

Wystąpienia zmiennych w formułach atomowych są wolne.

Wolne (związane) wystąpienia w φ i ψ pozostają wolne (związane) w formule $\varphi \to \psi$.

Wolne wystąpienia x w φ stają się związane w $\forall x \varphi$.
Wystąpienia innych zmiennych nie zmieniają charakteru.

Wystąpienia wolne a wystąpienia związane w formule

Wystąpienia zmiennych w formułach atomowych są wolne.

Wolne (związane) wystąpienia w φ i ψ pozostają wolne (związane) w formule $\varphi \to \psi$.

Wolne wystąpienia x w φ stają się związane w $\forall x \varphi$.
Wystąpienia innych zmiennych nie zmieniają charakteru.

Rozróżnienie pomiędzy zmiennymi wolnymi a związanymi jest analogiczne do rozróżnienia pomiedzy identyfikatorami lokalnymi a globalnymi w językach programowania.

Semantyka formuł

Struktura $\mathfrak{A}$ nad sygnaturą Σ to:

Semantyka formuł

Struktura $\mathfrak{A}$ nad sygnaturą Σ to:

- niepusty zbiór A: nośnik lub uniwersum $\mathfrak{A}$

Semantyka formuł

Struktura $\mathfrak{A}$ nad sygnaturą Σ to:

- niepusty zbiór A: nośnik lub uniwersum $\mathfrak{A}$
- interpretacja każdego symbolu operacji $f \in \Sigma_n^F$ jako funkcji n argumentowej $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$

Semantyka formuł

Struktura $\mathfrak{A}$ nad sygnaturą Σ to:

- niepusty zbiór A: nośnik lub uniwersum $\mathfrak{A}$
- interpretacja każdego symbolu operacji $f \in \Sigma_n^F$ jako funkcji n argumentowej $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$
- interpretacja każdego symbolu symbolu relacji $r \in \Sigma_n^R$ jako relacji n-argumentowej $r^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.

Semantyka formuł

Struktura $\mathfrak{A}$ nad sygnaturą Σ to:

- niepusty zbiór A: nośnik lub uniwersum $\mathfrak{A}$
- interpretacja każdego symbolu operacji $f \in \Sigma_n^F$ jako funkcji n argumentowej $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$
- interpretacja każdego symbolu symbolu relacji $r \in \Sigma_n^R$ jako relacji n-argumentowej $r^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.

Zapis: krotka postaci $\mathfrak{A} = \langle A, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}}, r_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, r_m^{\mathfrak{A}} \rangle$, gdzie $f_1, \ldots, f_n, r_1, \ldots, r_m$ są wszystkimi symbolami danej sygnatury.

Wartościowanie

Wartościowanie w Σ-strukturze $\mathfrak{A}$ to funkcja $\varrho : X \to A$.

Wartościowanie

Wartościowanie w Σ-strukturze $\mathfrak{A}$ to funkcja $\varrho : X \to A$.

Dla wartościowania ϱ, zmiennej $x \in X$ oraz elementu $a \in A$ definiujemy nowe wartościowanie $\varrho_x^a : X \to A$:

$$\varrho_x^a(y) = \begin{cases} \varrho(y) & y \neq x \\ a & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wartości termów

Wartość termu $t \in \mathcal{T}_\Sigma(X)$ w Σ-strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ oznaczamy przez $[\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}$, lub $[\![t]\!]_{\varrho}$.

Wartości termów

Wartość termu $t \in \mathcal{T}_{\Sigma}(X)$ w Σ-strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ oznaczamy przez $[\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}$, lub $[\![t]\!]_{\varrho}$.

- $[\![x]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} = \varrho(x)$.

Wartości termów

Wartość termu $t \in \mathcal{T}_\Sigma(X)$ w Σ-strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ oznaczamy przez $[\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}$, lub $[\![t]\!]_{\varrho}$.

- $[\![x]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} = \varrho(x)$.
- $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} = f^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho})$.

Znaczenie formuł

$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$ czytamy:

- formuła φ jest <u>spełniona</u> w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.
- formuła φ jest <u>prawdziwa</u> w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.

Znaczenie formuł

$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$ czytamy:

- formuła φ jest <u>spełniona</u> w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.
- formuła φ jest <u>prawdziwa</u> w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.

- Nie zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \bot$.

Znaczenie formuł

$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$ czytamy:

- formuła φ jest <u>spełniona</u> w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.
- formuła φ jest <u>prawdziwa</u> w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.

- Nie zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \bot$.
- Dla $n \geq 1$, $r \in \Sigma_n^R$ oraz termów $t_1, \ldots, t_n$
  $(\mathfrak{A}, \varrho) \models r(t_1, \ldots, t_n)$ wtw, gdy $\langle [\![t_1]\!]_\varrho^\mathfrak{A}, \ldots [\![t_n]\!]_\varrho^\mathfrak{A} \rangle \in r^\mathfrak{A}$.

Znaczenie formuł

$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$ czytamy:

- formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.
- formuła φ jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.

- Nie zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \bot$.
- Dla $n \geq 1$, $r \in \Sigma_n^R$ oraz termów $t_1, \ldots, t_n$
  $(\mathfrak{A}, \varrho) \models r(t_1, \ldots, t_n)$ wtw, gdy $\langle [\![t_1]\!]_\varrho^\mathfrak{A}, \ldots [\![t_n]\!]_\varrho^\mathfrak{A} \rangle \in r^\mathfrak{A}$.
- $(\mathfrak{A}, \varrho) \models t_1 = t_2$, wtw, gdy $[\![t_1]\!]_\varrho^\mathfrak{A} = [\![t_2]\!]_\varrho^\mathfrak{A}$.

Znaczenie formuł

$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$ czytamy:

- formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.
- formuła φ jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.

- Nie zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \bot$.
- Dla $n \geq 1$, $r \in \Sigma_n^R$ oraz termów $t_1, \ldots, t_n$
  $(\mathfrak{A}, \varrho) \models r(t_1, \ldots, t_n)$ wtw, gdy $\langle [\![t_1]\!]_\varrho^\mathfrak{A}, \ldots [\![t_n]\!]_\varrho^\mathfrak{A} \rangle \in r^\mathfrak{A}$.
- $(\mathfrak{A}, \varrho) \models t_1 = t_2$, wtw, gdy $[\![t_1]\!]_\varrho^\mathfrak{A} = [\![t_2]\!]_\varrho^\mathfrak{A}$.
- $(\mathfrak{A}, \varrho) \models (\varphi \to \psi)$, gdy nie zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$ lub zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \psi$.

Znaczenie formuł

$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$ czytamy:

- formuła φ jest <u>spełniona</u> w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.
- formuła φ jest <u>prawdziwa</u> w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu ϱ.

- Nie zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \bot$.
- Dla $n \geq 1$, $r \in \Sigma_n^R$ oraz termów $t_1, \ldots, t_n$ $(\mathfrak{A}, \varrho) \models r(t_1, \ldots, t_n)$ wtw, gdy $\langle [\![t_1]\!]_\varrho^\mathfrak{A}, \ldots [\![t_n]\!]_\varrho^\mathfrak{A} \rangle \in r^\mathfrak{A}$.
- $(\mathfrak{A}, \varrho) \models t_1 = t_2$, wtw, gdy $[\![t_1]\!]_\varrho^\mathfrak{A} = [\![t_2]\!]_\varrho^\mathfrak{A}$.
- $(\mathfrak{A}, \varrho) \models (\varphi \to \psi)$, gdy nie zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$ lub zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \psi$.
- $(\mathfrak{A}, \varrho) \models (\forall x \varphi)$ wtw, gdy dla dowolnego $a \in A$ zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho_x^a) \models \varphi$.

Niezależność spełniania od zmiennych związanych

Fakt Dla dowolnej Σ-struktury $\mathfrak{A}$ i dowolnej formuły φ jeśli wartościowania ϱ i ϱ' przyjmują równe wartości dla wszystkich zmiennych wolnych w φ, to

$$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi \text{ wtw, gdy } (\mathfrak{A}, \varrho') \models \varphi.$$

Niezależność spełniania od zmiennych związanych

Fakt Dla dowolnej Σ-struktury $\mathfrak{A}$ i dowolnej formuły φ jeśli wartościowania ϱ i ϱ' przyjmują równe wartości dla wszystkich zmiennych wolnych w φ, to

$$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi \ \text{ wtw, gdy } \ (\mathfrak{A}, \varrho') \models \varphi.$$

Ułatwienie notacyjne: $(\mathfrak{A}, x : a, y : b) \models \varphi$ zamiast $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$, gdy $\varrho(x) = a$ i $\varrho(y) = b$ i w φ występują wolno tylko x i y.

Jeśli φ jest zdaniem, to wartościowanie można całkiem pominąć

Niezależność spełniania od zmiennych związanych

Fakt Dla dowolnej Σ-struktury $\mathfrak{A}$ i dowolnej formuły φ jeśli wartościowania ϱ i ϱ' przyjmują równe wartości dla wszystkich zmiennych wolnych w φ, to

$$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi \;\text{ wtw, gdy }\; (\mathfrak{A}, \varrho') \models \varphi.$$

Ułatwienie notacyjne: $(\mathfrak{A}, x : a, y : b) \models \varphi$ zamiast $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$, gdy $\varrho(x) = a$ i $\varrho(y) = b$ i w φ występują wolno tylko x i y.

Jeśli φ jest zdaniem, to wartościowanie można całkiem pominąć
Stąd notacja $\mathfrak{A} \models \varphi$

Izomorfizm struktur

Dane dwie struktury $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ nad sygnaturą Σ.

Izomorfizm struktur

Dane dwie struktury $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ nad sygnaturą Σ.

Funkcja $h : A \to B$ jest <u>izomorfizmem Σ-struktur</u> (ozn. $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) jeśli:

Izomorfizm struktur

Dane dwie struktury $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ nad sygnaturą Σ.

Funkcja $h : A \to B$ jest <u>izomorfizmem Σ-struktur</u> (ozn. $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) jeśli:

- h jest bijekcją (różnowartościowe i na)

Izomorfizm struktur

Dane dwie struktury $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ nad sygnaturą Σ.

Funkcja $h : A \to B$ jest <u>izomorfizmem Σ-struktur</u> (ozn. $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) jeśli:

- h jest bijekcją (różnowartościowe i na)
- Dla $n \geq 0$, $f \in \Sigma_n^F$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Izomorfizm struktur

Dane dwie struktury $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ nad sygnaturą Σ.

Funkcja $h : A \to B$ jest <u>izomorfizmem Σ-struktur</u> (ozn. $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) jeśli:

- h jest bijekcją (różnowartościowe i na)
- Dla $n \geq 0$, $f \in \Sigma_n^F$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

- Dla $n \geq 1$, $r \in \Sigma_n^R$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$r^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \text{ wtw, gdy } r^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Własności izomorfizmów

- Złożenie dwóch izomorfizmów jest izomorfizmem

Własności izomorfizmów

- Złożenie dwóch izomorfizmów jest izomorfizmem
- Funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem

Własności izomorfizmów

- Złożenie dwóch izomorfizmów jest izomorfizmem
- Funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem
- Identyczność $\mathrm{id}_A : A \to A$ jest zawsze izomorfizmem
  $\mathrm{id}_A : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$

Strktury izomorficzne

Jeśli istnieje izomorfizm z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ to te struktury są <u>izomorficzne</u>, ozn. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

Strktury izomorficzne

Jeśli istnieje izomorfizm z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ to te struktury są <u>izomorficzne</u>, ozn. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

"Relacja" izomorfizmu jest

- przechodnia

Strktury izomorficzne

Jeśli istnieje izomorfizm z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ to te struktury są <u>izomorficzne</u>, ozn. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

"Relacja" izomorfizmu jest

- przechodnia
- symetryczna

Strktury izomorficzne

Jeśli istnieje izomorfizm z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ to te struktury są <u>izomorficzne</u>, ozn. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

"Relacja" izomorfizmu jest

- przechodnia
- symetryczna
- zwrotna

Izomorfizmy a logika

Twierdzenie
Jeśli $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to dla każdej formuły φ

$$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi \quad \text{wtw, gdy} \quad (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models \varphi$$

Izomorfizmy a logika

Twierdzenie
Jeśli $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to dla każdej formuły φ

$$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi \ \text{ wtw, gdy } \ (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models \varphi$$

Jeśli $x_1, \ldots, x_n$ to zmienne wolne w φ, to

$$(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n) \models \varphi \text{ wtw, gdy } (\mathfrak{B}, x_1 : h(a_1), \ldots, x_n : h(a_n)) \models \varphi$$

Izomorfizmy a logika cd

Twierdzenie

Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to dla każdego zdania φ

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{wtw, gdy} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Elementarna równoważność

$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są <u>elementarnie równoważne</u> (ozn $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), gdy dla każdego zdania φ logiki pierwszego rzędu nad wspólną sygnaturą tych struktur,
$\mathfrak{A} \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Elementarna równoważność

$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są <u>elementarnie równoważne</u> (ozn $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), gdy dla każdego zdania φ logiki pierwszego rzędu nad wspólną sygnaturą tych struktur,
$\mathfrak{A} \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Wniosek
Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Elementarna równoważność

$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są <u>elementarnie równoważne</u> (ozn $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), gdy dla każdego zdania φ logiki pierwszego rzędu nad wspólną sygnaturą tych struktur,
$\mathfrak{A} \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Wniosek
Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Intuicyjnie, struktury izomorficzne są logicznie nieodróżnialne.

Prawdziwość i spełnialność formuł

Formuła φ jest spełnialna w $\mathfrak{A}$, gdy istnieje wartościowanie ϱ w $\mathfrak{A}$ takie, że $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$.

Prawdziwość i spełnialność formuł

Formuła φ jest spełnialna w $\mathfrak{A}$, gdy istnieje wartościowanie ϱ w $\mathfrak{A}$ takie, że $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$.

Formuła φ jest spełnialna, gdy istnieje struktura $\mathfrak{A}$, w której φ jest spełnialna.

Prawdziwość i spełnialność formuł

Formuła φ jest spełnialna w $\mathfrak{A}$, gdy istnieje wartościowanie ϱ w $\mathfrak{A}$ takie, że $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$.

Formuła φ jest spełnialna, gdy istnieje struktura $\mathfrak{A}$, w której φ jest spełnialna.

φ jest prawdziwa (lub spełniona) w $\mathfrak{A}$, gdy dla każdego wartościowania ϱ w $\mathfrak{A}$ zachodzi $(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi$.

Prawdziwość i spełnialność zdań

Zdanie φ jest spełnialne, gdy istnieje struktura $\mathfrak{A}$, w której φ jest prawdziwe.

Prawdziwość i spełnialność zdań

Zdanie φ jest spełnialne, gdy istnieje struktura $\mathfrak{A}$, w której φ jest prawdziwe.

$\mathfrak{A}$ jest wtedy modelem zdania φ (ozn. $\mathfrak{A} \models \varphi$).

Prawdziwość i spełnialność zdań

Zdanie φ jest spełnialne, gdy istnieje struktura $\mathfrak{A}$, w której φ jest prawdziwe.

$\mathfrak{A}$ jest wtedy modelem zdania φ (ozn. $\mathfrak{A} \models \varphi$).

Σ-struktura $\mathfrak{A}$ jest modelem zbioru zdań Γ (ozn. $\mathfrak{A} \models \Gamma$), gdy $\mathfrak{A} \models \varphi$ zachodzi dla każdego $\varphi \in \Gamma$.

Prawdziwość i spełnialność zdań

Zdanie φ jest spełnialne, gdy istnieje struktura $\mathfrak{A}$, w której φ jest prawdziwe.

$\mathfrak{A}$ jest wtedy modelem zdania φ (ozn. $\mathfrak{A} \models \varphi$).

Σ-struktura $\mathfrak{A}$ jest modelem zbioru zdań Γ (ozn. $\mathfrak{A} \models \Gamma$), gdy $\mathfrak{A} \models \varphi$ zachodzi dla każdego $\varphi \in \Gamma$.

Zdanie φ jest tautologią (ozn. $\models \varphi$), gdy jest ono prawdziwe w każdej Σ-strukturze.

Pierwszy dowód: twierdzenie

Jeśli $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to dla każdej formuły φ

$$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi \quad \text{wtw, gdy} \quad (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models \varphi$$

Pierwszy dowód: Lemat

Jeśli $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to dla każdego termu t

$$h(\llbracket t \rrbracket_{\varrho}^{\mathfrak{A}}) = \llbracket t \rrbracket_{h \circ \varrho}^{\mathfrak{B}}$$

Dowód indukcyjny:

Pierwszy dowód: Lemat

Jeśli $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to dla każdego termu t

$$h([\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}) = [\![t]\!]^{\mathfrak{B}}_{h\circ\varrho}$$

Dowód indukcyjny:

- Jeśli t to x, to teza $h(\varrho(x)) = (h \circ \varrho)(x)$ zachodzi

Pierwszy dowód: Lemat

Jeśli $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ to dla każdego termu t

$$h([\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}) = [\![t]\!]^{\mathfrak{B}}_{h\circ\varrho}$$

Dowód indukcyjny:

- Jeśli t to x, to teza $h(\varrho(x)) = (h \circ \varrho)(x)$ zachodzi
- Jeśli t to $f(t_1, \ldots, x_n)$ to

$$\begin{aligned}
h([\![f(t_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} &= h(f^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho})) \\
&= f^{\mathfrak{B}}(h([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}), \ldots, h([\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho})) \\
&= f^{\mathfrak{B}}([\![t_1]\!]^{\mathfrak{B}}_{h\circ\varrho}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{B}}_{h\circ\varrho}) \\
&= [\![f(t_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathfrak{B}}_{h\circ\varrho}
\end{aligned}$$

Pierwszy dowód: formuły atomowe

Pierwszy dowód: formuły atomowe

- $(\mathfrak{A}, \varrho) \not\models \bot$ i $(\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \not\models \bot$

Pierwszy dowód: formuły atomowe

- $(\mathfrak{A}, \varrho) \not\models \bot$ i $(\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \not\models \bot$
-

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \varrho) \models r(t_1, \ldots, t_n) &\text{ wtw } \langle [\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} \rangle \in r^{\mathfrak{A}} \\ &\text{ wtw } \langle h([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}), \ldots, h([\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}) \rangle \in r^{\mathfrak{B}} \\ &\text{ wtw } \langle [\![t_1]\!]^{\mathfrak{B}}_{h\circ\varrho}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{B}}_{h\circ\varrho} \rangle \in r^{\mathfrak{B}} \\ &\text{ wtw } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models r(t_1, \ldots, t_n)\end{aligned}$$

Pierwszy dowód: formuły atomowe

- $(\mathfrak{A}, \varrho) \not\models \bot$ i $(\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \not\models \bot$
- $$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \varrho) \models r(t_1, \ldots, t_n) \ &\text{wtw } \langle [\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} \rangle \in r^{\mathfrak{A}} \\ &\text{wtw } \langle h([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}), \ldots, h([\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}) \rangle \in r^{\mathfrak{B}} \\ &\text{wtw } \langle [\![t_1]\!]^{\mathfrak{B}}_{h \circ \varrho}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{B}}_{h \circ \varrho} \rangle \in r^{\mathfrak{B}} \\ &\text{wtw } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models r(t_1, \ldots, t_n)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \varrho) \models t_1 = t_2 \ &\text{wtw } [\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} = [\![t_2]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} \\ &\text{wtw } h([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}) = h([\![t_2]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}) \\ &\text{wtw } [\![t_1]\!]^{\mathfrak{B}}_{h \circ \varrho} = [\![t_2]\!]^{\mathfrak{B}}_{h \circ \varrho} \\ &\text{wtw } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models t_1 = t_2\end{aligned}$$

Pierwszy dowód: formuły złożone

Pierwszy dowód: formuły złożone

- $$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \varrho) \models (\varphi \to \psi) &\text{ wtw } (\mathfrak{A}, \varrho) \not\models \varphi \text{ lub } (\mathfrak{A}, \varrho) \models \psi \\ &\text{ wtw } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \not\models \varphi \text{ lub } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models \psi \\ &\text{ wtw } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models (\varphi \to \psi)\end{aligned}$$

Pierwszy dowód: formuły złożone

- $$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \varrho) \models (\varphi \to \psi) &\text{ wtw } (\mathfrak{A}, \varrho) \not\models \varphi \text{ lub } (\mathfrak{A}, \varrho) \models \psi \\ &\text{ wtw } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \not\models \varphi \text{ lub } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models \psi \\ &\text{ wtw } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models (\varphi \to \psi)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \varrho) \models (\forall x \varphi) &\text{ wtw istnieje } a \in A \text{ takie, że } (\mathfrak{A}, \varrho^a_x) \models \varphi \\ &\text{ wtw istnieje } a \in A \text{ takie, że } (\mathfrak{B}, h \circ (\varrho^a_x)) \models \varphi \\ &\text{ wtw istnieje } h(a) \in B \text{ takie, że } (\mathfrak{B}, (h \circ \varrho)^{h(a)}_x) \models \varphi \\ &\text{ wtw istnieje } b \in B \text{ takie, że } (\mathfrak{B}, (h \circ \varrho)^b_x) \models \varphi \\ &\text{ wtw } (\mathfrak{B}, h \circ \varrho) \models (\forall x \varphi)\end{aligned}$$

Podstawianie termów

$\varphi(t/x)$ to wynik podstawienia termu t na wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w φ.

Podstawianie termów

$\varphi(t/x)$ to wynik podstawienia termu t na wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w φ.

Przykład: Formuły

- $\forall y(y \leq x)$
- $\forall z(z \leq x)$

oznaczają to samo.

Podstawianie termów

$\varphi(t/x)$ to wynik podstawienia termu t na wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w φ.

Przykład: Formuły

- $\forall y(y \leq x)$
- $\forall z(z \leq x)$

oznaczają to samo.

Podstawienie y na x w tych formułach daje

- $\forall y(y \leq y)$
- $\forall z(z \leq y)$

które są różne

Dopuszczalne podstawienie

- $\perp(t/x) = \perp$, gdy $x \notin FV(\varphi)$;

Dopuszczalne podstawienie

- $\bot(t/x) = \bot$, gdy $x \notin FV(\varphi)$;
- $r(t_1, \ldots, t_n)(t/x) = r(t_1(t/x), \ldots, t_n(t/x))$;

Dopuszczalne podstawienie

- $\bot(t/x) = \bot$, gdy $x \notin FV(\varphi)$;
- $r(t_1, \ldots, t_n)(t/x) = r(t_1(t/x), \ldots, t_n(t/x))$;
- $(t_1 = t_2)(t/x) = (t_1(t/x) = t_2(t/x))$;

Dopuszczalne podstawienie

- $\bot(t/x) = \bot$, gdy $x \notin FV(\varphi)$;
- $r(t_1, \ldots, t_n)(t/x) = r(t_1(t/x), \ldots, t_n(t/x))$;
- $(t_1 = t_2)(t/x) = (t_1(t/x) = t_2(t/x))$;
- $(\varphi \to \psi)(t/x) = \varphi(t/x) \to \psi(t/x)$;

Dopuszczalne podstawienie

- $\bot(t/x) = \bot$, gdy $x \notin FV(\varphi)$;
- $r(t_1, \ldots, t_n)(t/x) = r(t_1(t/x), \ldots, t_n(t/x))$;
- $(t_1 = t_2)(t/x) = (t_1(t/x) = t_2(t/x))$;
- $(\varphi \to \psi)(t/x) = \varphi(t/x) \to \psi(t/x)$;
- $(\forall x\, \varphi)(t/x) = \forall x\, \varphi$;

Dopuszczalne podstawienie

- $\perp(t/x) = \perp$, gdy $x \notin FV(\varphi)$;
- $r(t_1, \ldots, t_n)(t/x) = r(t_1(t/x), \ldots, t_n(t/x))$;
- $(t_1 = t_2)(t/x) = (t_1(t/x) = t_2(t/x))$;
- $(\varphi \to \psi)(t/x) = \varphi(t/x) \to \psi(t/x)$;
- $(\forall x\, \varphi)(t/x) = \forall x\, \varphi$;
- $(\forall y\, \varphi)(t/x) = \forall y\, \varphi(t/x)$, gdy $y \neq x$, oraz $y \notin FV(t)$;

Dopuszczalne podstawienie

- $\bot(t/x) = \bot$, gdy $x \notin FV(\varphi)$;
- $r(t_1, \ldots, t_n)(t/x) = r(t_1(t/x), \ldots, t_n(t/x))$;
- $(t_1 = t_2)(t/x) = (t_1(t/x) = t_2(t/x))$;
- $(\varphi \to \psi)(t/x) = \varphi(t/x) \to \psi(t/x)$;
- $(\forall x\, \varphi)(t/x) = \forall x\, \varphi$;
- $(\forall y\, \varphi)(t/x) = \forall y\, \varphi(t/x)$, gdy $y \neq x$, oraz $y \notin FV(t)$;
- W pozostałych przypadkach podstawienie jest niedopuszczalne.

Lemat o podstawieniu

Niech:

- $\mathfrak{A}$ – dowolna struktura
- $\varrho : X \to A$ – dowolne wartościowanie w $\mathfrak{A}$
- t – dowolny term

Lemat o podstawieniu

Niech:

- $\mathfrak{A}$ – dowolna struktura
- $\varrho : X \to A$ – dowolne wartościowanie w $\mathfrak{A}$
- t – dowolny term

Wtedy:

- Dla dowolnego termu s i zmiennej x

$$[\![s(t/x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} = [\![s]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho^{a}_{x}}$$

gdzie $a = [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}$.

Lemat o podstawieniu

Niech:

- $\mathfrak{A}$ – dowolna struktura
- $\varrho : X \to A$ – dowolne wartościowanie w $\mathfrak{A}$
- t – dowolny term

Wtedy:

- Dla dowolnego termu s i zmiennej x

  $$[\![s(t/x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho} = [\![s]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho^a_x}$$

  gdzie $a = [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}$.
- Dla dowolnej formuły φ, jeśli term t jest dopuszczalny dla x w φ, to

  $$(\mathfrak{A}, \varrho) \models \varphi(t/x) \quad \text{wtw, gdy} \quad (\mathfrak{A}, \varrho^a_x) \models \varphi,$$

  gdzie $a = [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\varrho}$.