First-order logic. Usage

Tautologies, using first-order logic, relations to natural language

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \land \forall x\psi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
10. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \land \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \lor \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \varphi \lor \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \varphi \land \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
10. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;
11. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
10. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;
11. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$;
12. $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$;

A few important tautologies

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
10. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;
11. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$;
12. $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$;
13. $\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$.

Prenex normal form

Formula φ is in prenex normal form, if it is

$$Q_1 y_1\, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n\, \psi$$

where each Q_i is either $\forall$ or $\exists$, and ψ is open.

Prenex normal form

Formula φ is in prenex normal form, if it is

$$Q_1 y_1\, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n\, \psi$$

where each Q_i is either $\forall$ or $\exists$, and ψ is open.

Fact For every first-order formula there exists an equivalent formula in prenex normal form

Prenex normal form

Formula φ is in prenex normal form, if it is

$$Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

where each Q_i is either $\forall$ or $\exists$, and ψ is open.

Fact For every first-order formula there exists an equivalent formula in prenex normal form

Formula $\exists y p(y) \rightarrow \forall z q(z)$ is equivalent to:

Prenex normal form

Formula φ is in prenex normal form, if it is

$$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n \psi$$

where each Q_i is either $\forall$ or $\exists$, and ψ is open.

Fact For every first-order formula there exists an equivalent formula in prenex normal form

Formula $\exists y p(y) \to \forall z q(z)$ is equivalent to:

1. $\neg \exists y\, p(y) \vee \forall z\, q(z)$;

Prenex normal form

Formula φ is in prenex normal form, if it is

$$Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

where each Q_i is either $\forall$ or $\exists$, and ψ is open.

Fact For every first-order formula there exists an equivalent formula in prenex normal form

Formula $\exists y p(y) \to \forall z q(z)$ is equivalent to:

1. $\neg \exists y \, p(y) \vee \forall z \, q(z)$;
2. $\forall y \, \neg p(y) \vee \forall z \, q(z)$;

Prenex normal form

Formula φ is in prenex normal form, if it is

$$Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

where each Q_i is either $\forall$ or $\exists$, and ψ is open.

Fact For every first-order formula there exists an equivalent formula in prenex normal form

Formula $\exists y p(y) \to \forall z q(z)$ is equivalent to:

1. $\neg \exists y \, p(y) \lor \forall z \, q(z)$;
2. $\forall y \, \neg p(y) \lor \forall z \, q(z)$;
3. $\forall y (\neg p(y) \lor \forall z \, q(z))$;

Prenex normal form

Formula φ is in prenex normal form, if it is

$$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n \psi$$

where each Q_i is either $\forall$ or $\exists$, and ψ is open.

Fact For every first-order formula there exists an equivalent formula in prenex normal form

Formula $\exists y p(y) \to \forall z q(z)$ is equivalent to:

1. $\neg \exists y\, p(y) \lor \forall z\, q(z)$;
2. $\forall y\, \neg p(y) \lor \forall z\, q(z)$;
3. $\forall y (\neg p(y) \lor \forall z\, q(z))$;
4. $\forall y \forall z (\neg p(y) \lor q(z))$;

Prenex normal form

Formula φ is in prenex normal form, if it is

$$Q_1 y_1\, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n\, \psi$$

where each Q_i is either $\forall$ or $\exists$, and ψ is open.

Fact For every first-order formula there exists an equivalent formula in prenex normal form

Formula $\exists y p(y) \to \forall z q(z)$ is equivalent to:

1. $\neg\exists y\, p(y) \lor \forall z\, q(z)$;
2. $\forall y\, \neg p(y) \lor \forall z\, q(z)$;
3. $\forall y(\neg p(y) \lor \forall z\, q(z))$;
4. $\forall y \forall z(\neg p(y) \lor q(z))$;
5. $\forall y \forall z(p(y) \to q(z))$.

Każdy cyrulik sewilski goli tych wszystkich mężczyzn w Sewilli,
którzy się sami nie golą.
Ale nie goli żadnego z tych, którzy golą się sami.
A zatem w Sewilli nie ma ani jednego cyrulika.

Implikacja materialna i związek przyczynowo-skutkowy

Implikacja w logice klasycznej to implikacja materialna.
Wartość logiczna „$\varphi \to \psi$” zależy **wyłącznie** od wartości logicznych przypisanych jego „φ” i „ψ”.
To **nie jest** związek przyczynowo-skutkowy ani następstwo chronologiczne.

W języku polskim stwierdzenie „jeśli φ to ψ” oczywiście sugeruje związek przyczynowo-skutkowy:

Jeśli zasilanie jest włączone, to terminal działa.

Implikacja materialna nie zachodzi. Materialną prawdą jest

Jeśli terminal działa to zasilanie jest włączone.

Implikacja materialna i związek przyczynowo-skutkowy

Implikacja w logice klasycznej to implikacja materialna.
Wartość logiczna „$\varphi \to \psi$” zależy **wyłącznie** od wartości logicznych przypisanych jego „φ” i „ψ”.
To **nie jest** związek przyczynowo-skutkowy ani następstwo chronologiczne.

W języku polskim stwierdzenie „jeśli φ to ψ” oczywiście sugeruje związek przyczynowo-skutkowy:

Jeśli zasilanie jest włączone, to terminal działa.

Implikacja materialna nie zachodzi. Materialną prawdą jest

Jeśli terminal działa to zasilanie jest włączone.

Terminal działa, ponieważ zasilanie jest włączone,
stwierdza związek przyczynowo-skutkowy i faktyczne zajście wymienionych zdarzeń i jest niewyrażalne w logice klasycznej.

Każdy kot ma wąsy.
Pewien kot ma wąsy.

Konfuzje składniowe: kwantyfikacja

Każdy kot ma wąsy.
Pewien kot ma wąsy.

$$\forall x(Kot(x) \rightarrow MaWąsy(x));$$
$$\exists x(Kot(x) \wedge MaWąsy(x)).$$

Konfuzje składniowe: negacja

Liczba n jest parzysta;

Liczba n jest dwukrotnością pewnej liczby

oznaczają to samo.

Konfuzje składniowe: negacja

Liczba n jest parzysta;

Liczba n jest dwukrotnością pewnej liczby

oznaczają to samo.

Zaprzeczeniem pierwszego z nich jest oczywiście zdanie

Liczba n nie jest parzysta,

ale zaprzeczeniem drugiego nie jest zdanie

Liczba n nie jest dwukrotnością pewnej liczby,

Konfuzje składniowe: koniunkcja vs. alternatywa

- Zabrania się zaśmiecania i zanieczyszczania drogi.[1]
- Zabrania się zaśmiecania lub zanieczyszczania drogi.[2]

[1] Kodeks Drogowy przed nowelizacją w roku 1997.
[2] Kodeks Drogowy po nowelizacji w roku 1997.

Konfuzje kolejności kwantyfikacji

You can fool some of the people all of the time, and all of the people some of the time, but you can not fool all of the people all of the time.

Abraham Lincoln

Konfuzje kolejności kwantyfikacji

You can fool some of the people all of the time, and all of the people some of the time, but you can not fool all of the people all of the time.
Abraham Lincoln

Opcje:

$$(\exists p \forall t \dots) \wedge (\forall p \exists t \dots) \wedge \neg(\forall p \forall t \dots)$$
$$(\forall t \exists p \dots) \wedge (\exists t \forall p \dots) \wedge \neg(\forall p \forall t \dots)$$

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli C, to B
A

B

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli C, to B
A

B

Jeśli Marysia ma do napisania esej,
to będzie do późna pracować w bibliotece.
Jeśli biblioteka będzie otwarta późnym wieczorem,
to Marysia będzie do późna pracować w bibliotece.
Marysia ma do napisania esej.

Marysia będzie do późna pracować w bibliotece.

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli B, to C
A

B

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli B, to C
A

B

Jeśli telewizor Marii jest zepsuty,
odda go do reperacji.
Jeśli Maria odda telewizor do reperacji,
nie będzie mogła zapłacić rachunku za elektryczność.
Telewizor Marii jest zepsuty.

Maria odda telewizor do reperacji.

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli B, to C
A

B

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli B, to C
A

B

Jeśli telewizor Marii jest zepsuty,
odda go do reperacji.
Jeśli Maria odda telewizor do reperacji,
nie będzie mogła wykupić lekarstw.
Telewizor Marii jest zepsuty.

Maria odda telewizor do reperacji.

Expressive power of first-order logic

Expressive power of first-order logic

- A sentence expresses a property of a structure

Expressive power of first-order logic

- A sentence expresses a property of a structure
  - Distinguishing structures
  - Formalization of structure properties
- A formula defines a relation in a structure

Expressive power of first-order logic

- A sentence expresses a property of a structure
  - Distinguishing structures
  - Formalization of structure properties
- A formula defines a relation in a structure
  - Distinguishing elements in structures
  - Formalization of element/tuple properties

Distinguishing structures

Signature:

- Binary operation $\cdot$
- Constant ε.

Signature:

- Binary operation $\cdot$
- Constant ε.

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (\forall z_1 \forall z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \rightarrow y = z_1 \vee y = z_2) \rightarrow y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = \varepsilon)$$

is:

Distinguishing structures

Signature:

- Binary operation $\cdot$
- Constant ε.

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (\forall z_1 \forall z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \to y = z_1 \vee y = z_2) \to y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = \varepsilon)$$

is:

- true in the structure $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ of words over the alphabet $\{a, b\}^*$ with concatenation and empty word.

Distinguishing structures

Signature:

- Binary operation $\cdot$
- Constant ε.

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (\forall z_1 \forall z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \to y = z_1 \vee y = z_2) \to y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = \varepsilon)$$

is:

- true in the structure $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ of words over the alphabet $\{a, b\}^*$ with concatenation and empty word.
- false in the structure $\langle \{a, b, c\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ of words over the alphabet $\{a, b, c\}^*$ with concatenation and empty word.

Distinguishing structures

Signature:

- Binary operation $\cdot$
- Constant ε.

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (\forall z_1 \forall z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \rightarrow y = z_1 \vee y = z_2) \rightarrow y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = \varepsilon$$

is:

- true in the structure $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ of words over the alphabet $\{a, b\}^*$ with concatenation and empty word.
- false in the structure $\langle \{a, b, c\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ of words over the alphabet $\{a, b, c\}^*$ with concatenation and empty word.

The sentence distinguishes those two structures

Formalization of element/tuple properties

The ring of integers $\mathbb{Z} = \langle Z, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

Formalization of element/tuple properties

The ring of integers $\mathbb{Z} = \langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$
Formula

$$\exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 y = x + (z_1 \cdot z_1) + (z_2 \cdot z_2) + (z_3 \cdot z_3) + (z_4 \cdot z_4)$$

defines the relation $x \leq y$.

Formalization of element/tuple properties

The ring of integers $\mathbb{Z} = \langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$
Formula

$$\exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 y = x + (z_1 \cdot z_1) + (z_2 \cdot z_2) + (z_3 \cdot z_3) + (z_4 \cdot z_4)$$

defines the relation $x \leq y$.
Lagrange's Four Squares Theorem
Every positive integer is a sum of four squares of integers.