Twierdzenie (Entscheidungsproblem)

Nierozstrzygalny jest następujący problem decyzyjny:
Dana: Zdanie φ logiki pierwszego rzędu
Pytanie: Czy φ jest tautologią?

Twierdzenie (Entscheidungsproblem)

Nierozstrzygalny jest następujący problem decyzyjny:
Dana: Zdanie φ logiki pierwszego rzędu
Pytanie: Czy φ jest tautologią?

W dowodzie posłużymy się nierozstrzygalnością problemu stopu dla maszyn Turinga.

Maszyna Turinga nad alfabetem A to krotka $M = \langle \Delta, Q, \delta, q_0, q_f \rangle$, gdzie:

- Δ jest skończonym alfabetem, zawierającym A oraz symbol $\Box \notin A$ (blank);
- Q jest skończonym zbiorem stanów;
- $q_0 \in Q$ jest stanem początkowym;
- $q_f \in Q$ jest stanem końcowym lub akceptującym;
- $\delta : (Q - \{q_f\}) \times \Delta \to \Delta \times Q \times \{-1, 0, +1\}$ jest funkcją przejścia.

Korzystamy z następującej postaci problemu stopu:
Dana: Maszyna Turinga M

Korzystamy z następującej postaci problemu stopu:
Dana: Maszyna Turinga M
Pytanie: Czy M akceptuje słowo puste?

Niech ϑ oznacza koniunkcję następujących formuł

- $\forall y \neg P(y, c)$
- $\forall x \exists y P(x, y)$
- $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow R(x, y))$
- $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \rightarrow (R(y, z) \rightarrow R(x, z)))$
- $\forall x \neg R(x, x)$

Niech ϑ oznacza koniunkcję następujących formuł

- $\forall y \neg P(y, c)$
- $\forall x \exists y P(x, y)$
- $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow R(x, y))$
- $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \rightarrow (R(y, z) \rightarrow R(x, z)))$
- $\forall x \neg R(x, x)$

Zdanie ϑ jest spełnialne, a każdy jego model $\mathfrak{A}$ zawiera nieskończony ciąg różnych elementów $c^{\mathfrak{A}} = a_0, a_1, a_2, \ldots$, takich że $(a_i, a_{i+1}) \in P^{\mathfrak{A}}$ dla każdego i.

Cel – konstrukcja, która dla dowolnej maszyny Turinga M utworzy zdanie φ_M o takiej własności:

Cel – konstrukcja, która dla dowolnej maszyny Turinga M utworzy zdanie φ_M o takiej własności:
$\underline{M \text{ akceptuje słowo puste}}$ wtw, gdy $\underline{\varphi_M \text{ jest tautologią.}}$

Cel – konstrukcja, która dla dowolnej maszyny Turinga M utworzy zdanie φ_M o takiej własności:
$\underline{M \text{ akceptuje słowo puste}}$ wtw, gdy $\underline{\varphi_M \text{ jest tautologią.}}$

Wygodniej skonstruować taką zdanie ψ_M, że
$\underline{M \text{ zapętla się na słowie pustym}}$ wtw, gdy $\underline{\psi_M \text{ jest spełnialna,}}$

Cel – konstrukcja, która dla dowolnej maszyny Turinga M utworzy zdanie φ_M o takiej własności:
M akceptuje słowo puste   wtw, gdy φ_M jest tautologią.

Wygodniej skonstruować taką zdanie ψ_M, że
M zapętla się na słowie pustym   wtw, gdy ψ_M jest spełnialna,
i przyjąć $\varphi_M = \neg\psi_M$.

Sygnatura:

Sygnatura:

- jednoargumentowe symbole relacyjne S_q, dla wszystkich stanów $q \in Q$;

Sygnatura:

- jednoargumentowe symbole relacyjne S_q, dla wszystkich stanów $q \in Q$;
- dwuargumentowe symbole relacyjne C_a, dla wszystkich symboli $a \in \Delta$;

Sygnatura:

- jednoargumentowe symbole relacyjne S_q, dla wszystkich stanów $q \in Q$;
- dwuargumentowe symbole relacyjne C_a, dla wszystkich symboli $a \in \Delta$;
- dwuargumentowy symbol relacyjny G;

Sygnatura:

- jednoargumentowe symbole relacyjne S_q, dla wszystkich stanów $q \in Q$;
- dwuargumentowe symbole relacyjne C_a, dla wszystkich symboli $a \in \Delta$;
- dwuargumentowy symbol relacyjny G;
- stała c i symbole P i R ze zdania ϑ

- Formułę $S_q(x)$ czytamy: po x krokach obliczenia maszyna jest w stanie q.

- Formułę $S_q(x)$ czytamy: po x krokach obliczenia maszyna jest w stanie q.
- Formułę $G(x, y)$ czytamy: po x krokach głowica maszyny znajduje się w pozycji y.

- Formułę $S_q(x)$ czytamy: po x krokach obliczenia maszyna jest w stanie q.
- Formułę $G(x, y)$ czytamy: po x krokach głowica maszyny znajduje się w pozycji y.
- Formułę $C_a(x, y)$ czytamy: po x krokach na pozycji y znajduje się symbol a.

1. ϑ
2. $S_{q_0}(c) \wedge G(c,c) \wedge \forall x\, C_{\mathrm{B}}(c,x)$;
3. $\forall x(\bigvee_{q\in Q} S_q(x))$;
4. $\forall x(S_q(x) \to \neg S_p(x))$, dla $q,p \in Q$, $q \neq p$;
5. $\forall x \forall y(\bigvee_{a\in\Delta} C_a(x,y))$;
6. $\forall x \forall y(C_a(x,y) \to \neg C_b(x,y))$, dla $a,b \in \Delta$, $a \neq b$;
7. $\forall x \exists y\, G(x,y)$;
8. $\forall x \forall y \forall z(G(x,y) \wedge G(x,z) \to y = z)$;

9. $\forall x \forall y \forall z (S_q(x) \wedge G(x,y) \wedge C_a(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow S_p(z) \wedge C_b(z,y))$, gdy $\delta(q,a) = (p,b,i)$;
10. $\forall x \forall y \forall z (\neg G(x,y) \wedge C_a(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow C_a(z,y))$;
11. $\forall x \forall y \forall z \forall v (S_q(x) \wedge G(x,y) \wedge C_a(x,y) \wedge P(x,z) \wedge P(y,v) \rightarrow G(z,v))$, gdy $\delta(q,a) = (p,b,+1)$;
12. $\forall x \forall y \forall z (S_q(x) \wedge G(x,y) \wedge C_a(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow G(z,y))$, gdy $\delta(q,a) = (p,b,0)$;
13. $\forall x \forall y \forall z \forall v (y \neq c \rightarrow (S_q(x) \wedge G(x,y) \wedge C_a(x,y) \wedge P(x,z) \wedge P(v,y) \rightarrow G(z,v)))$, gdy $\delta(q,a) = (p,b,-1)$;
14. $\forall x \forall y \forall z \forall v (S_q(x) \wedge G(x,c) \wedge C_a(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow G(z,c))$, gdy $\delta(q,a) = (p,b,-1)$;
15. $\forall x \neg S_{q_f}(x)$.