Piotr Chrząstowski-Wachtel
Uniwersytet Warszawski

O czym jest algorytmika?

Algorytmika

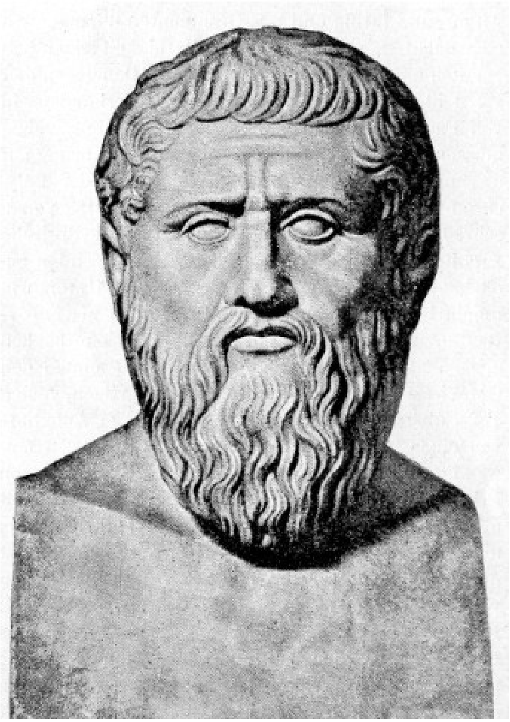
- Najważniejsza część informatyki
- Opisuje jak rozwiązywać problemy algorytmiczne, jakie struktury danych dobierać, jak analizować zachowanie się programów.
- Pozwala na osiągnięcie znacznie bardziej spektakularnych wyników, niż samo przyspieszanie działania sprzętu

Czego dotyczy algorytmika?

- Wszelkiego planowania działań – w szczególności przy pisaniu programów komputerowych
- Musimy pamiętać, że komputerom trzeba niezwykle wyraźnie wyspecyfikować polecenia – będąc dość głupimi urządzeniami nie domyślą się, o co nam mogło chodzić, jeśli nieprecyzyjnie przedstawimy o co nam chodzi.

Kiedy zaczęła się algorytmika?

- Pierwszymi wielkimi algorytmikami byli Starożytni Grecy
- Pierwszymi wielkimi naukowymi problemami algorytmicznymi były konstrukcje goemetryczne, zwane platońskimi



Platon

Konstrukcje platońskie

- Nieformalnie chodzi o to, żeby wyznaczać pewne obiekty na płaszczyźnie (punkty, okręgi, proste) spełniające dane założenia.
- Przykładowe zadanie:
  - Mając dany okrąg $o(O,r)$ oraz punkt A leżący poza okręgiem, poprowadzić prostą styczną do danego okręgu, przechodzącą przez punkt A

Czy poprawne jest takie rozwiązanie:

- Wbijamy nóżkę cyrkla w punkt A i opierając na ostrzu linijkę obracamy ją, aż się ukaże punkt okręgu.
- Rysujemy linię łączącą te dwa punkty.

Platon zabraniał takich operacji

- ... jak i wielu innych rzeczy takich jak kreślenie paraboli, spirali, wychodzenie w trzeci wymiar itd.
- Co zatem wolno było robić i na jakich obiektach?

Dziedzina operacji platońskich

- Koncentrujemy się na 3 rodzajach obiektów: punktach, prostych i okręgach
- Wolno na tych obiektach przeprowadzać jedną z pięciu operacji.

Operacje platońskie

- Dla danych dwóch punktów narysować prostą przez nie przechodzącą,
- Dla danych dwóch punktów wykreślić okrąg o środku w jednym z nich i promieniu równym odległości między nimi,
- Dla dwóch prostych wyznaczyć punkt ich przecięcia (o ile istnieje),
- Dla prostej i okręgu wyznaczyć ich punkty przecięcia,
- Dla dwóch okręgów wyznaczyć punkty ich przecięcia.
- ... i nic ponadto!

Dozwolone operacje

- Nazwijmy nasze operacje odpowiednio
  - l := line(X,Y) – prosta przechodząca przez X i Y
  - o:= circle(O,Y) – okrąg o środku O i promieniu OY
  - X := l × k – punkt przecięcia prostych l i k
  - (X,Y) := l ∅ o – punkty przecięcia prostej l i okręgu o
  - (X,Y) := o1 ∞ o2 – punkty przecięcia okręgów o1 i o2
- Wszystkie te operacje są *częściowe*: są określone nie dla wszystkich argumentów

Rozwiązanie zadania

- Możemy przedstawić rozwiązanie w postaci sekwencji czynności dla okręgu o(O,Y) oraz punktu A leżącego poza nim:
  - l := line(O,A) – kreślimy prostą l łączącą środek okręgu z punktem A
  - o1:= circle(O,A) – kreślimy okrąg o środku O i promieniu OA
  - o2:= circle(A,O) – kreślimy okrąg o środku A i promieniu O
  - (P,Q) := o1 ∞ o2 – wyznaczamy punkty przecięcia okręgów o1 i o2
  - k := line(P,Q) – prowadzimy symetralną odcinka OA
  - X := l $\times$ k – znajdujemy środek odcinka OA
  - o3 := circle (X,O) – kreślimy okrąg o środku X i promieniu XO
  - (R,S) := o ∞ o3 – wyznaczamy punkty przecięcia okręgów o i o3
  - s := line(R,A) – prosta s jest jedną z dwóch poszukiwanych stycznych

Rozwiązanie zadania – wersja kompaktowa

- Można krócej:
  - s := line((o ∞_1 (circle((line(O,A) $\times$ line(circle(A,O)) ∞ circle(O,A)),O))),A)
    - *tutaj przez ∞_1 rozumiemy pierwszy z dwóch punktów przecięcia*
- ... i tak mniej więcej wygląda *programowanie funkcyjne*

Problemy nierozwiązywalne

- Starożytni Grecy nie umieli sobie poradzić z trzema konstrukcjami:
  - wyznaczeniem boku kwadratu o polu równym polu koła o promieniu 1 (kwadratura koła)
  - podziałem dowolnego kąta na 3 równe części (trysekcja kąta)
  - wyznaczeniem boku sześcianu o dwukrotnie większej objętości niż sześcian jednostkowy (podwojenie sześcianu)

Nierozwiązywalność niektórych zadań konstrukcyjnych

- Dopiero w XIX wieku pokazano, że żadnej z tych trzech konstrukcji nie da się wykonać.
- Być może powodem jest zbyt wąski repertuar środków?
- Ale czy gdy dorzucimy parę innych operacji, to czy nie znajdą się nowe niewykonywalne konstrukcje?

Problemy nierozwiązywalne

- Dużo później, w XX wieku, Alan Turing pokazał, że istnieją problemy algorytmiczne, których nie da się rozwiązać w żadnej dziedzinie algorytmicznej. To był jeden z najciekawszych wyników w historii informatyki i to uzyskany jeszcze przed powstaniem komputerów (lata 30-te XX wieku).

Problem odpowiedniości Posta

Emil Post

- Przykład:
  - x_1=abb y_1=a
  - x_2=b y_2=abb
  - x_3=a y_3=bb
- Czy istnieje taki ciąg indeksów i1,i2,…,in, że $x_{i1}\ldots x_{in}=y_{i1}\ldots y_{in}$?
- Problem odpowiedniości Posta jest w ogólnym przypadku nierozstrzygalny! Choć dla niektórych przypadków (np. dla powyższego) można podać odpowiedź, nie ma jednak ogólnego algorytmu, który dla dowolnych danych $x_1,\ldots,x_n$ i $y_1,\ldots,y_n$ stwierdziłby, czy można wyrównać odpowiednie słowa x-owe i y-owe za pomocą tego samego ciągu indeksów.